



1.1 Domínios & Regiões

1. Esboce o conjunto $\mathcal{R}$ do plano $\mathbb{R}^2$ dada abaixo e determine sua fronteira. Classifique $\mathcal{R}$ em: aberto, fechado, limitado, compacto, ou conexo.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, 0 \leq y\}$ (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 < 1\}$

(c) $\mathcal{R} =]1, 2[\times]0, +\infty[$ (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$

(e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 < x^2 < 9\}$ (f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \text{ e } 1 \leq y \leq 2\}$

(g) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$ (h) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, -1 \leq y < 2\}$

(i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 \geq 9\}$ (j) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sin x \leq y \leq \cos x, 0 \leq x \leq \pi/4\}$

(k) $\mathcal{R} = [0, 1] \times [1, 2]$ (l) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$

(m) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 - y^2\}$ (n) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2 - 1)y < 0\}$

(o) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 < y\}$ (p) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2\}$

(q) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 < y^2\}$ (r) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2\}$

2. Esboce a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2 - 1)[(x - 1)^2 + y^2 - 1] < 0\}$, verifique que ela é aberta e determine sua fronteira.

3. Em cada caso determine e represente graficamente o *domínio* da função $z = f(x, y)$.

(a) $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$ (b) $z = (|x| - |y|)^{-1/2}$ (c) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$

(d) $z = \ln(1 - 4x^2 - y^2/9)$ (e) $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 3)}$ (f) $z = x \exp(y) - \ln x$

(g) $z = \arccos(y - x)$ (h) $z = \sqrt{(x - 3)(y - 2)}$ (i) $z = \arcsin[x/(x - y)]$

(j) $z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ (k) $z = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}$ (l) $z = \frac{x - y}{\sin x - \sin y}$

4. Em cada caso esboce algumas curvas de nível função $z = f(x, y)$, de modo a obter uma visualização do seu gráfico.

- (a) $z = x^2 + y^2$ (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (c) $z = (x^2 + y^2)^{-1}$
 (d) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ (e) $z = x + y$ (f) $z = \sin(x - y)$
 (g) $z = |x| - |y|$ (h) $z = 8 - x^2 - 2y$ (i) $z = 2x(x^2 + y^2)^{-1}$
 (j) $z = xy$ (k) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (l) $z = \sqrt{1 - x^2/4 - y^2/9}$
 (m) $z = |x| + |y|$ (n) $z = x - y^2$ (o) $z = x + y^2$

5. Identifique e esboce a curva de nível da função $z = 2y - 4x^3$ que passa no ponto $P(1, 2)$. Observe o comportamento da função ao longo da tangente que passa no ponto P .

6. Identifique as superfícies de nível da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, nos níveis 0, 1 e 2

7. Identifique a superfície de nível da função $w = x^2 + y^2 - z^2$ que passa no ponto $P(1, 1, 1)$.

8. Descreva as superfícies de nível da função $w = f(x, y, z)$.

- (a) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$ (b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
 (c) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ (d) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$.

9. Esboce o gráfico da função $z = f(x, y)$ dada por:

- (a) $f(x, y) = 3$ (b) $f(x, y) = x$ (c) $f(x, y) = 1 - x - y$
 (d) $f(x, y) = \sin y$ (e) $f(x, y) = \exp(\sqrt{x^2 + y^2})$ (f) $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$
 (g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (h) $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ (i) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$
 (j) $f(x, y) = 1 - x^2$ (k) $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ (l) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

1.2 Limite e Continuidade

1. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre

$$\text{que: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1, 1)}{\Delta x} = 0 \text{ e } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

2. Em cada caso, mostre que a função $z = f(x, y)$ não tem limite quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} \ z = \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{(b)} \ z = \frac{x}{x^2+y^2} & \text{(c)} \ z = \frac{|x|}{x-y^3} & \text{(d)} \ z = \frac{xy}{2x^2+3y^2} \\
\text{(e)} \ z = \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{(f)} \ z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{(g)} \ z = \frac{x^6}{(x^3+y^2)^2} & \text{(h)} \ z = \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4} \\
\text{(i)} \ z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y} & \text{(j)} \ z = \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} & \text{(k)} \ z = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{(l)} \ z = \frac{x^4+y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.
\end{array}$$

3. Verifique que a função $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ não tem limite na origem.

4. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \ln(xy+1) & \text{(b)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(y^2-1)\sin x}{x} & \text{(c)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y} \\
\text{(d)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{\sin x \sin y} & \text{(e)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{(f)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\exp[\sin(x^2y)] + \cos y}{\cos(xy)} \\
\text{(g)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} z \sin[(x^2y^2 + z^2)^{-1/2}] & \text{(h)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ y \rightarrow 4}} y\sqrt{x^3+2y} & \text{(i)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \pi}} [x \cos(y/4) + 1]^{2/3}
\end{array}$$

5. A partir da definição de limite, prove que:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 3}} (2x+3y) = 11 & \text{(b)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (3x^2+y) = 5 & \text{(c)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} (x^2+y^2) = 2 \\
\text{(d)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 1}} (2x+y+z) = 4 & \text{(e)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} (2x^2-y^2) = -1 & \text{(f)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow -1}} (x^2+y^2-4x+2y) = -4 \\
\text{(g)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} (x^2-1) = 0 & \text{(h)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2} = 0 & \text{(i)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin(1/x) = 0 \\
\text{(j)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0 & \text{(k)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -2}} (x^2-y^2) = -3 & \text{(l)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2(x-1)^2(y-2)}{3(x-1)^2+3(y-2)^2} = 0
\end{array}$$

6. Mostre que:

$$\text{(a)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{x} = 0 \quad \text{(b)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}} = 2 \quad \text{(c)} \ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = \infty.$$

7. Mostre que as funções $f(x, y) = \frac{xy}{y-x^3}$ e $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2-y^2}$ não têm limite na origem.

8. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{3x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$. Calcule os limites de $f(x, y)$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, ao longo dos seguintes caminhos: (a) eixo x ; (b) reta $y = x$; (c) curva $y = x^2$. A função f tem limite na origem? Por quê?

9. Verifique se a função $z = f(x, y)$ é contínua no ponto P_0 indicado.

(a) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $P_0(-3, 4)$ (b) $z = \exp(-xy) \ln(7 + x^2 - 2y)$, $P_0(0, 0)$

(c) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $P_0(0, 0)$ (d) $z = \frac{xy}{y - 2x}$, se $y \neq 2x$ e $f(x, 2x) = 1$, $P_0(1, 2)$

10. Identifique a função $z = f(x, y)$ como combinação de funções elementares do cálculo e deduza que ela é contínua em seu domínio.

(a) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ (b) $f(x, y) = \frac{4x^2 - y^2}{2x - y}$ (c) $f(x, y) = \frac{x}{y^2 - 1}$

(d) $f(x, y) = \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$ (e) $f(x, y) = \arcsen(y/x)$ (f) $f(x, y) = \ln(xy - 2)$

11. Discuta a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$, se $x \neq y$ e $f(x, x) = 1$

(b) $f(x, y) = \exp[1/(x^2 + y^2 - 1)]$, se $x^2 + y^2 < 1$ e $f(x, y) = 0$, se $x^2 + y^2 \geq 1$

(c) $f(x, y) = \frac{\exp(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 1$

(d) $f(x, y) = \frac{\sen(x + y)}{x + y}$, se $x + y \neq 0$ e $f(x, -x) = 1$

(e) $f(x, y, z) = \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, se $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ e $f(0, 0, 0) = 0$

(f) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$, se $4x^2 + 9y^2 \leq 1$ e $f(x, y) = 0$, se $4x^2 + 9y^2 > 1$

(g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, se $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e $f(x, y, z) = 0$, se $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

12. Considere as funções g e h definidas em $\mathbb{R}^2$ por:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Verifique que a origem é uma descontinuidade de $g(x, y)$ e de $h(x, y)$. Em que caso a descontinuidade pode ser removida? Recorde-se que *remover* uma descontinuidade significa redefinir a função de modo a torná-la contínua.

13. Verifique que a origem é uma descontinuidade da função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sen(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Essa descontinuidade pode ser removida?

14. Sabendo que: $1 - \frac{x^2 y^2}{3} \leq \frac{\arctg(xy)}{xy} < 1$ e $2|xy| - \frac{x^2 y^2}{6} < 4 - 4 \cos \sqrt{|xy|} < 2|xy|$, calcule:

$$(a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arctg(xy)}{xy} \quad (b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|}.$$

15. Seja $f(x, y) = \exp[-1/(x^2 + y^2)]$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Verifique que f é contínua em todo ponto (x, y) do $\mathbb{R}^2$ e calcule os limites:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y}.$$

16. Considere a função $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^3}$, se $x^2 + y^3 \neq 0$, e $f(0, 0) = 0$, definida no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^3 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

- (a) Calcule o limite de f na origem, ao longo das retas $y = mx$.
 (b) Calcule o limite de f na origem, ao longo do caminho $y = -x^{2/3}e^x$.
 (c) Calcule o limite de f na origem, ao longo do caminho $r = \cos^2 \theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$.
 (d) Discuta a continuidade de f .

17. Mostre que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \arctg\left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\pi}{2}$ (veja o Exercício 1.2(6c)).

18. Use coordenadas polares e mostre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2} = 0$.

19. **FIQUE ALERTA!** A mudança para coordenadas polares pode nos levar a conclusões falsas. Por exemplo, em coordenadas polares a função

$$f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$$

assume a forma:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{2r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}, \text{ quando } r \neq 0$$

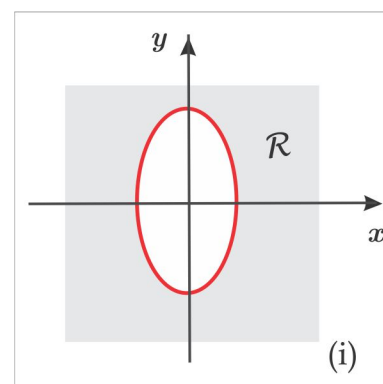
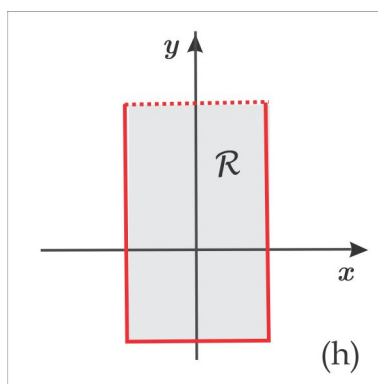
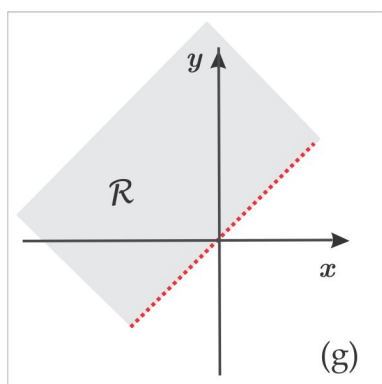
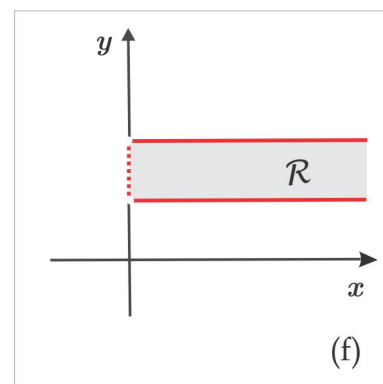
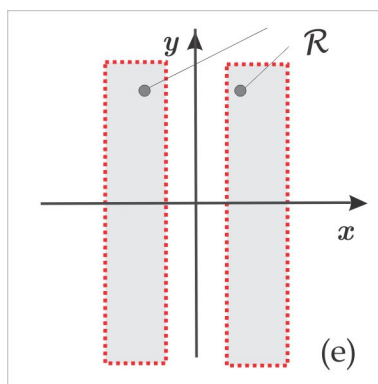
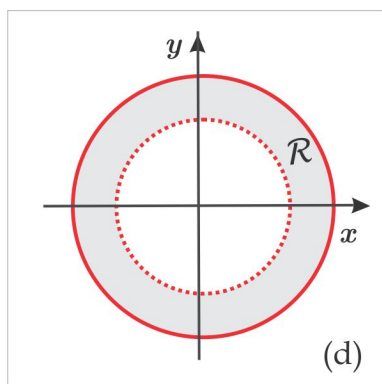
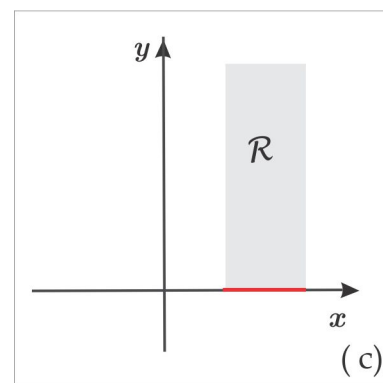
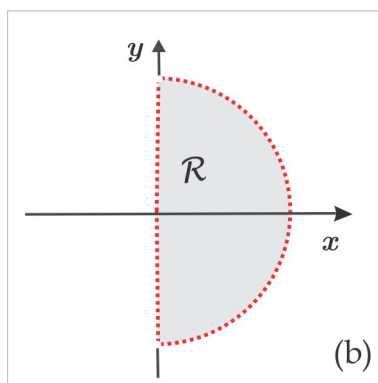
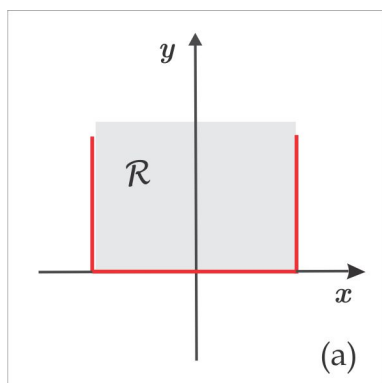
e daí segue que, ao deixar θ constante e fazer $r \rightarrow 0$, encontra-se $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$. Esse cálculo induz a afirmação (falsa!) de que o limite da função na origem é igual a 0. Ao longo do caminho $y = x^2$, contudo, tem-se $r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$ e, portanto:

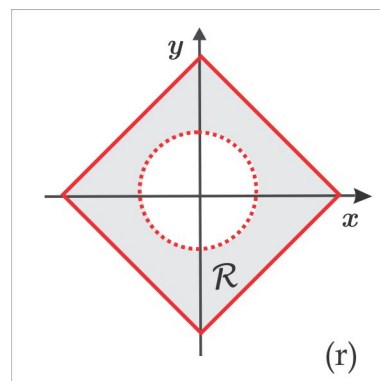
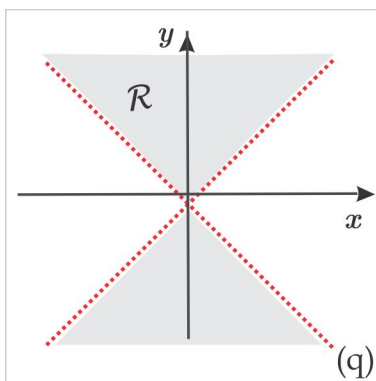
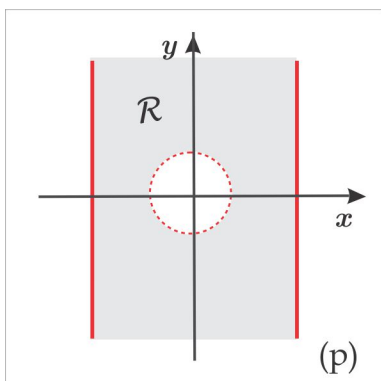
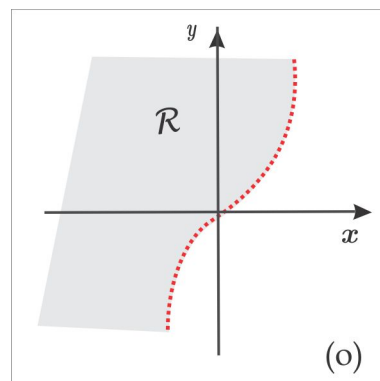
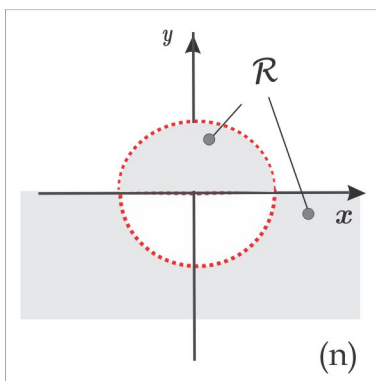
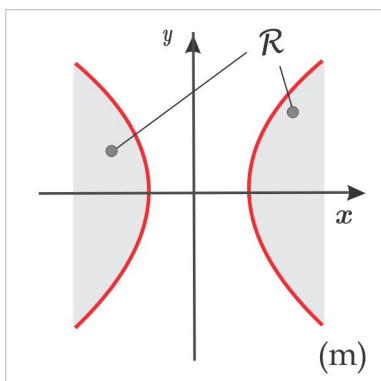
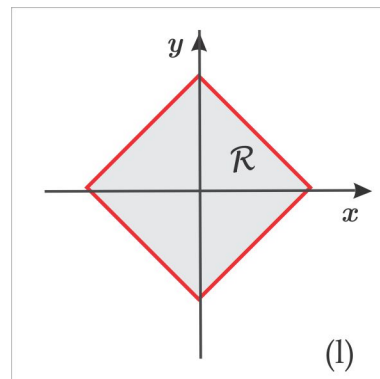
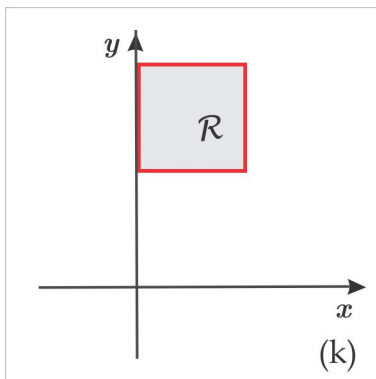
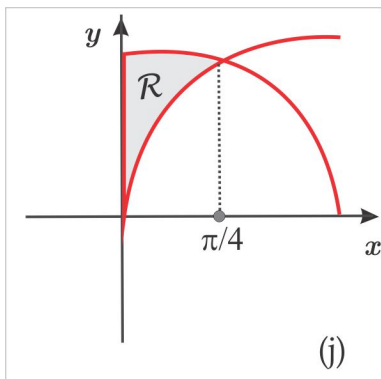
$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{2r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \quad \forall r, \theta.$$

Assim, no caminho $y = x^2$ (ou $r \sin \theta = r^2 \cos^2 \theta$), tem-se $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1$ e, portanto, a função $f(x, y)$ não tem limite na origem.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.1

1. ESBOÇO GRÁFICO



IDENTIFICANDO A FRONTEIRA

- (a) $\partial\mathcal{R} = \{(x, 0); -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(\pm 1, y); y \geq 0\}.$
- (b) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\} \cup \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}.$
- (c) $\partial\mathcal{R} = \{(1, y); y \geq 0\} \cup \{(2, y); y \geq 0\} \cup \{(x, 0); 1 \leq x \leq 2\}.$
- (d) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y); x^2 + y^2 = 2\}.$
- (e) $\partial\mathcal{R}$ é constituída das retas $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ e $x = 3$.
- (f) $\partial\mathcal{R} = \{(0, y); 1 \leq y \leq 2\} \cup \{(x, 1); x \geq 0\} \cup \{(x, 2); x \geq 0\}.$

(g) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); x = y\}.$

(h) $\partial\mathcal{R} = \{(\pm 1, y); -1 \leq y \leq 2\} \cup \{(x, -1); -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 2); -1 \leq x \leq 1\}.$

(i) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); 4x^2 + y^2 = 9\}.$

(j) $\partial\mathcal{R} = \{(0, y); 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin x); 0 \leq x \leq \pi/4\} \cup \{(x, \cos x); 0 \leq x \leq \pi/4\}.$

(k) $\partial\mathcal{R}$ é o quadrado de vértices $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ e $(1, 1)$.

(l) $\partial\mathcal{R}$ é o quadrado de vértices $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$.

(m) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); x^2 - y^2 = 1\}.$

(n) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0); -\infty < x < \infty\}.$

(o) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); y = x^3\}.$

(p) $\partial\mathcal{R} = \{(\pm 2, y)\} \cup \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}.$

(q) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); y = \pm x\}.$

(r) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y); |x| + |y| = 2\}.$

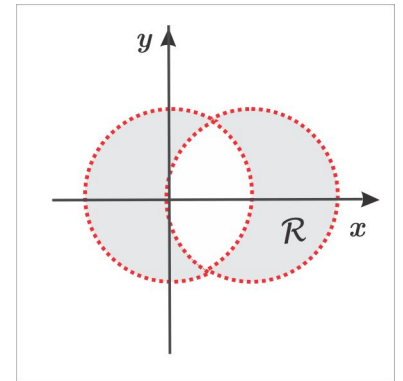
CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA

Compacto	(j)	(k)	(l)											
Aberto	(e)	(g)	(o)	(q)										
Fechado	(a)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)								
Limitado	(b)	(d)	(h)	(j)	(k)	(l)	(r)	(s)						
Conexo	(a)	(b)	(c)	(d)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(o)	(p)	(r)

2. Observe que a desigualdade $(x^2 + y^2 - 1)[(x - 1)^2 + y^2 - 1] < 0$ é equivalente ao sistema:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 < 1 \quad \text{e} \quad (x - 1)^2 + y^2 > 1 \\ \text{ou} \\ x^2 + y^2 > 1 \quad \text{e} \quad (x - 1)^2 + y^2 < 1 \end{array} \right.$$

Vemos que $\partial\mathcal{R} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ e, portanto, $\mathcal{R}$ é aberto.



3. Representemos por $D(f)$ o domínio da função f .

(a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ e } 2x \geq y\}.$

(b) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x|\}.$

(c) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}.$

(d) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2/9 < 1\}.$

(e) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}.$

(f) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$

(g) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq x + 1\}.$

(h) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \text{ e } y \leq 2 \text{ ou } x \geq 3 \text{ e } y \geq 2\}.$

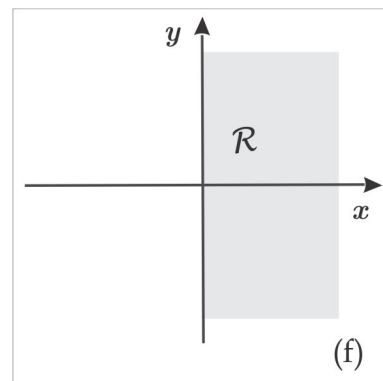
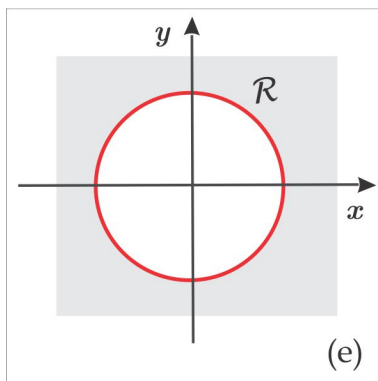
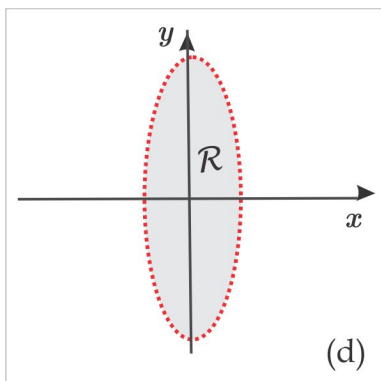
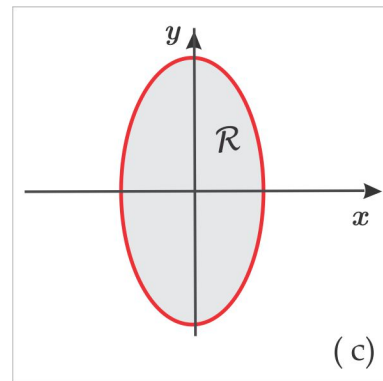
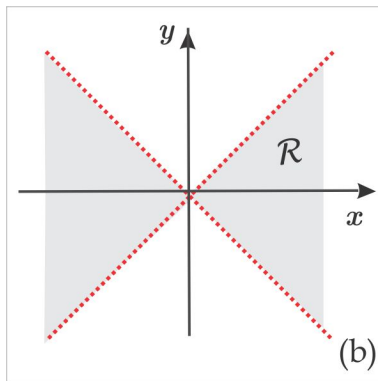
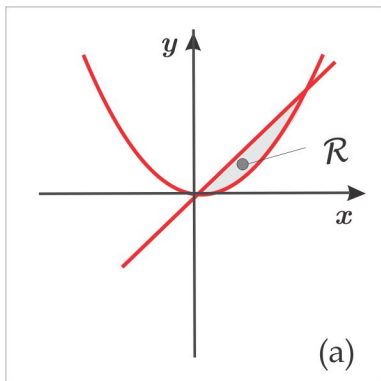
(i) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x(x - y)^{-1} \leq 1\}.$

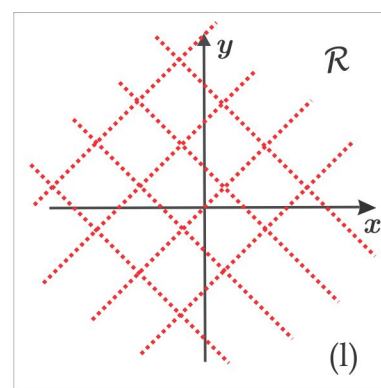
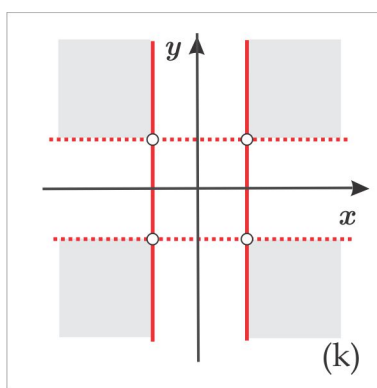
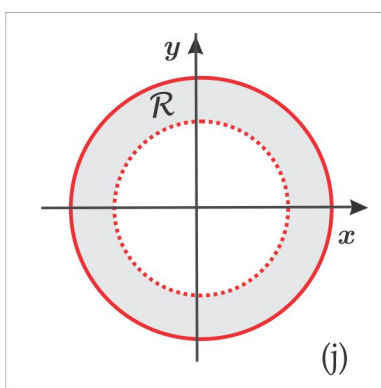
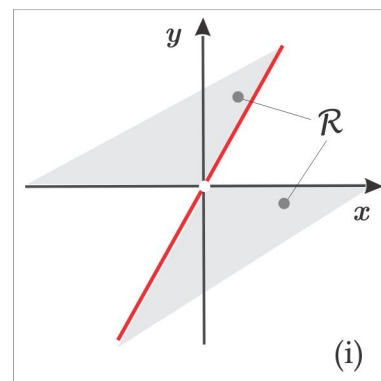
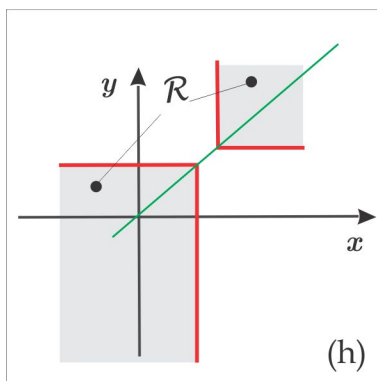
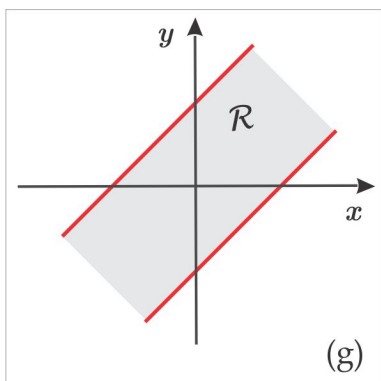
(j) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}.$

(k) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq (-1)^n x + n\pi\}.$

(l) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1)(y^2 - 1)^{-1} \geq 0\}.$

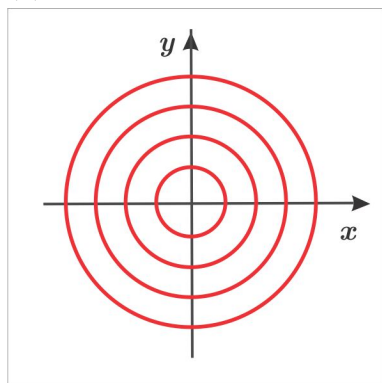
ESBOÇO GRÁFICO



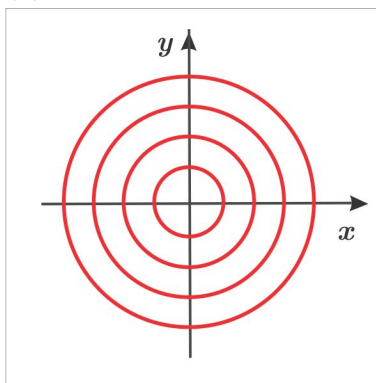


4. Em cada caso fazemos $z = \lambda$, λ constante, e obtemos as curvas de nível. Os gráficos abaixo ilustram as projeções no plano xy das curvas de nível.

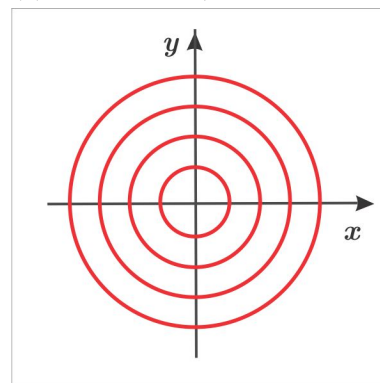
(a) $x^2 + y^2 = \lambda$, $\lambda \geq 0$



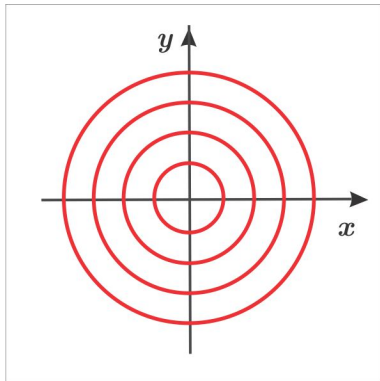
(b) $x^2 + y^2 = \sqrt{\lambda}$, $\lambda > 0$



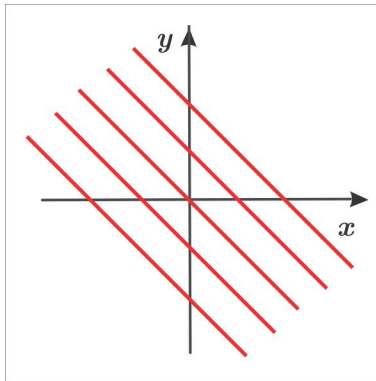
(c) $x^2 + y^2 = 1/\lambda$, $\lambda > 0$



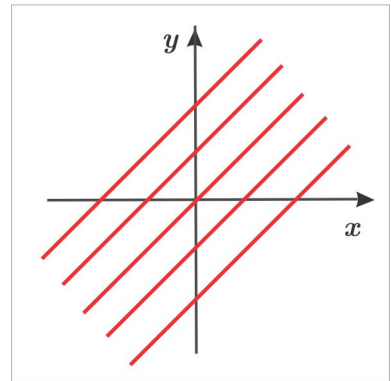
(d) $x^2 + y^2 = e^\lambda - 1, \lambda \geq 0$



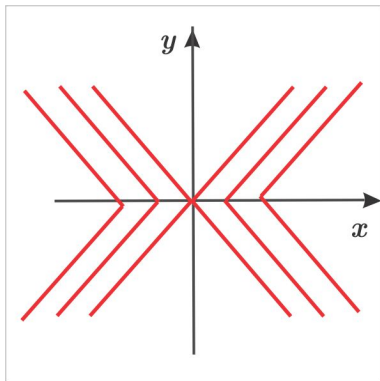
(e) $x + y = \lambda$



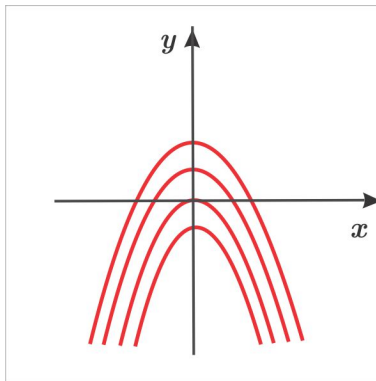
(f) $x - y = \arcsen \lambda$



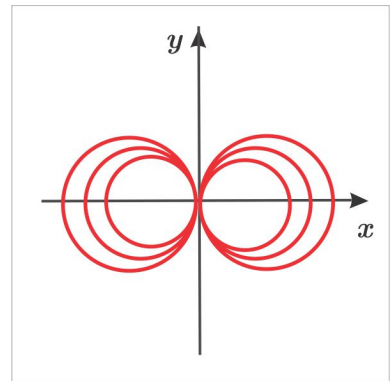
(g) $|x| - |y| = \lambda$



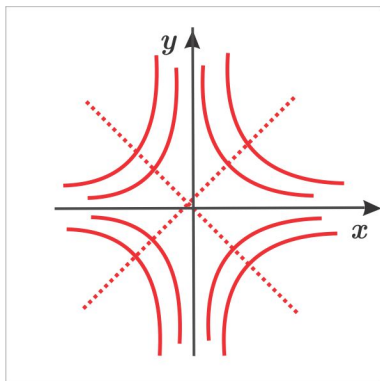
(h) $x^2 + 2y = 8 - \lambda$



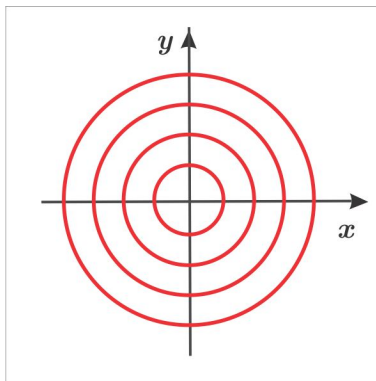
(i) $2x = c(x^2 + y^2)$



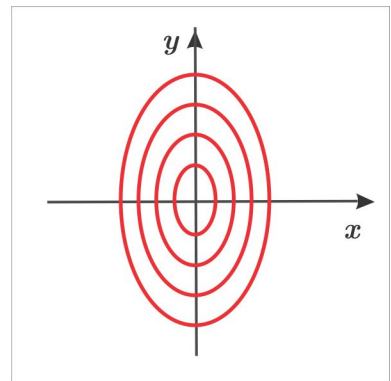
(j) $xy = \lambda$



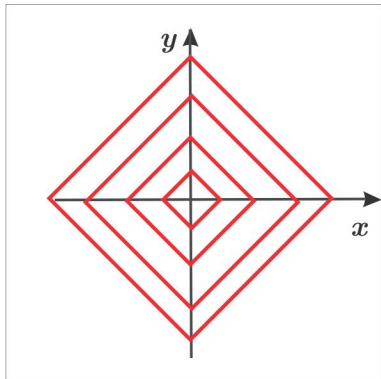
(k) $x^2 + y^2 = 9 - \lambda^2, |\lambda| < 3$



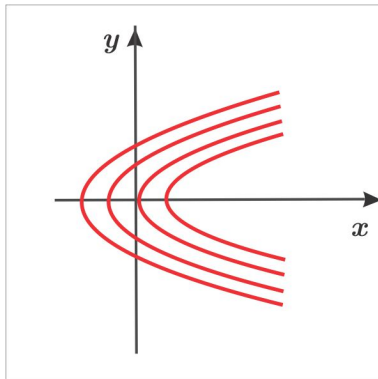
(l) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - \lambda^2, |\lambda| < 1$



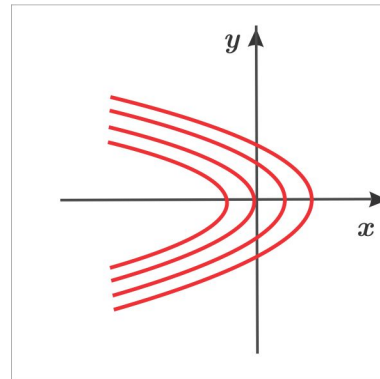
(m) $|x| + |y| = \lambda$



(n) $x - y^2 = \lambda$

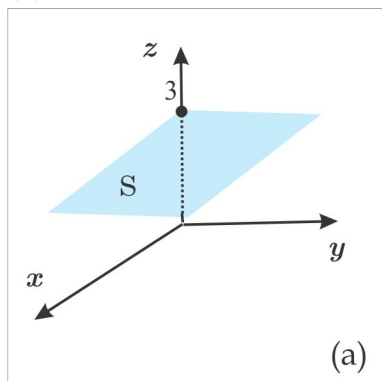


(o) $x + y^2 = \lambda$

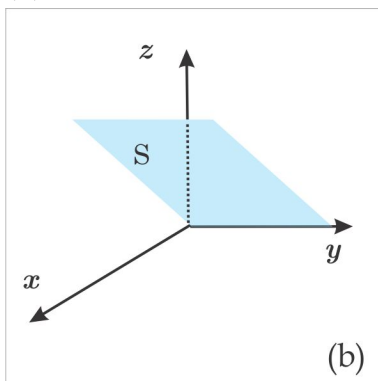


5. No ponto $P_0(1, 2)$ temos $z = 0$ e a curva de nível por P_0 é $y = 2x^3$. A reta tangente tem equação $y = 6x - 4$ e sobre essa reta $f = -4x^3 + 12x - 8$. Se $x \rightarrow \pm\infty$, então $f \rightarrow \mp\infty$.
6. A origem, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, respectivamente.
7. O hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
8. (a) planos (b) elipsóides (c) hiperbolóides (d) cilindros.
9. Veja as ilustrações gráficas.

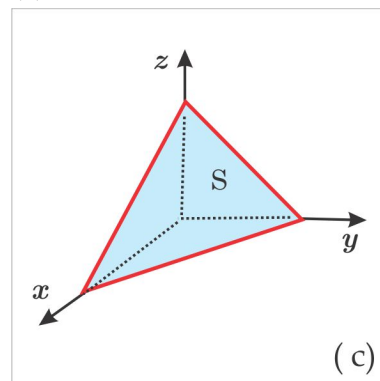
(a) $z = 3$



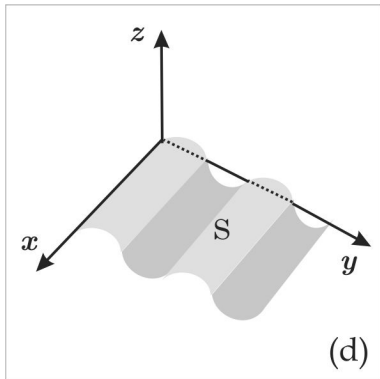
(b) $z = x$



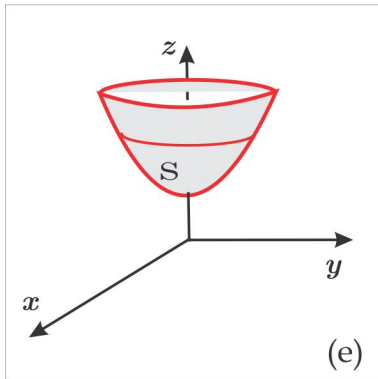
(c) $x + y + z = 1$



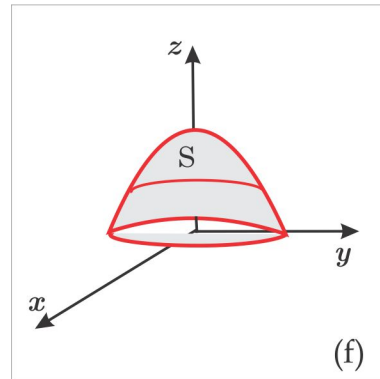
(d) $z = \sin y$



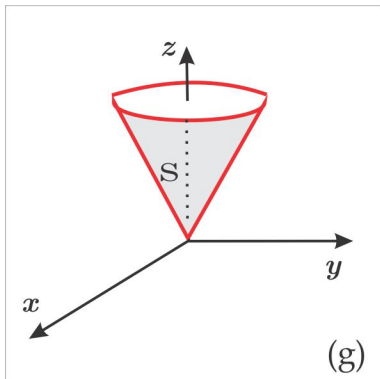
$z = \exp \sqrt{x^2 + y^2}$



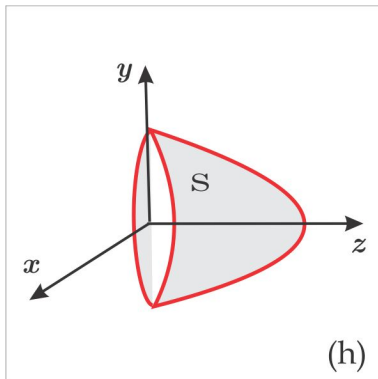
(f) $z = 3 - x^2 - y^2$



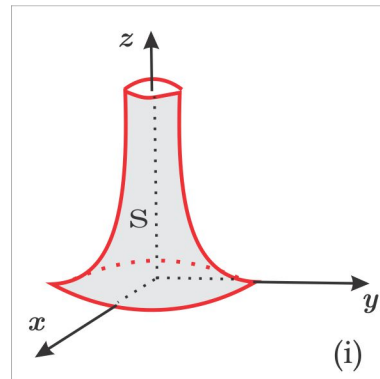
(g) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



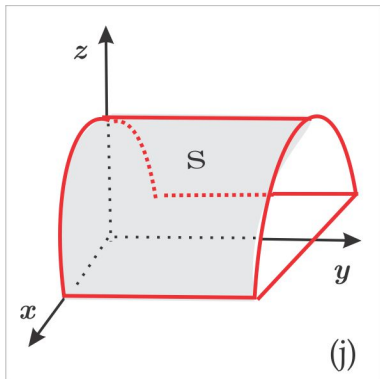
(h) $z = 16 - x^2 - y^2$



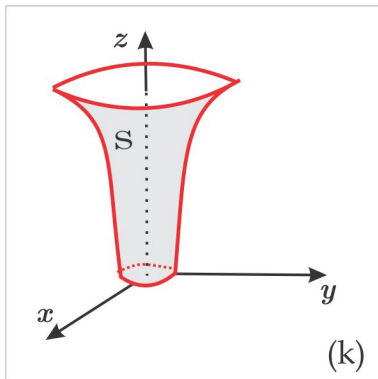
(i) $z = (x^2 + y^2)^{-1/2}$



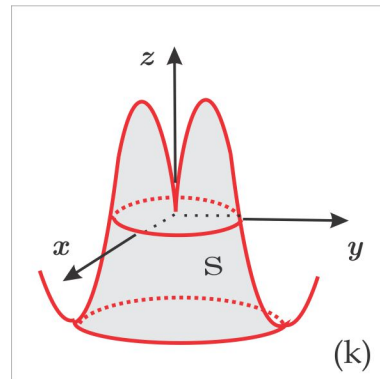
(j) $z = 1 - x^2$



(k) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$



(l) $z = \sin(x^2 + y^2)$



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.2

1. Um cálculo direto nos dá

$$\frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1, 1)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(1 + \Delta x)^2 + 1} \quad \text{e} \quad \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0$$

e daí resulta:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1, 1)}{\Delta x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

2. Além dos caminhos canônicos como as retas, considere: $y = \sqrt{x}$ em (e); $y = -x^2 e^x$ em (i); $y^2 = x^3$ em (g); $y = x^2$ em (h) e $y = -x e^x$ em (j).
3. Ao longo do eixo x o limite é igual a 1 e ao longo do eixo z o limite é igual a -1 .
4. (a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) $1/2$ (e) $\pi/4$ (f) 2 (g) 0 (h) 0 (i) $(1 + \sqrt{2}/2)^{2/3}$.
5. Como ilustração, faremos o item (e). De fato:

$$|2x^2 - y^2 + 1| = |2(x^2 - 4) - (y^2 - 9)| \leq 2|x - 2||x + 2| + |y - 3||y + 3|.$$

Se $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} < \delta$, então $|x - 2| < \delta$ e $|y - 3| < \delta$ e teremos $|2x^2 - y^2 + 1| < 2\delta|x + 2| + \delta|y + 3|$. Para evitar uma equação do 2º grau em δ , admitamos que o δ procurado seja menor do que 1. Assim: $|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4 < 5$ e $|y + 3| = |y - 3 + 6| \leq |y - 3| + 6 < \delta + 6 < 7$. Logo, $|2x^2 - y^2 + 1| < 17\delta$ e para concluir, imaginemos $\varepsilon > 0$ dado e escolhamos $\delta = \varepsilon/17$. Dessa forma teremos:

$$0 < \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} < \delta \implies |2x^2 - y^2 + 1| < \varepsilon.$$

6. (a) Use $1 + \cos \sqrt{xy}$ como fator de racionalização para obter:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin^2(\sqrt{xy})}{x(1 + \cos \sqrt{xy})} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[\frac{\sin^2(\sqrt{xy})}{xy} \times \frac{y}{1 + \cos \sqrt{xy}} \right] = 0.$$

- (b) Usando coordenadas polares, temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2)}{1 - \cos r} = (\text{usar L'ôpital}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r \cos(r^2)}{\sin r} = (\text{usar L'ôpital}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2 \cos(r^2) - 4r^2 \sin(r^2)}{\cos r} = 2.$$

- (c) Uma das desigualdades que aprendemos no cálculo de uma variável é: $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

com $a, b \geq 0$. Considerando $a = x^2$ e $b = y^2$, encontramos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}}{x^2 + y^2} \geq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \infty.$$

7. (a) Considere os caminhos $y = 0$ e $y = x^k e^x$, escolhendo k adequado (b) Idem.

8. (a) 0 (b) 0 (c) $3/8$. A função não tem limite em $(0, 0)$.
9. (a) sim (b) sim (c) não (d) não.
10. A função $f(x, y)$ é combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua em seu domínio.
- (a) $D(f) = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{ ou } x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\}$.
- (b) $D(f) = \{(x, y) : y \neq 2x\}$.
- (c) $D(f) = \{(x, y) : y \neq \pm 1\}$.
- (d) $D(f) = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$.
- (e) Se considerarmos $g(t) = \arcsin t$, $-1 \leq t \leq 1$, teremos $f(x, y) = g(y/x)$ e a função $f(x, y)$ é contínua no domínio $D(f) = \{(x, y) : x \neq 0 \text{ e } |y/x| \leq 1\}$.
- (f) A função $f(x, y)$ é contínua no domínio $D(f) = \{(x, y) : xy > 2\}$.
11. Note que a função está definida em todo plano $\mathbb{R}^2$.
- (a) f é descontínua nos pontos da reta $y = x$, exceto no ponto $(1/2, 1/2)$.
- (b) f é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$.
- (c) f é descontínua na origem.
- (d) f não tem ponto de descontinuidade, isto é, ela é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.
- (e) f é descontínua na origem.
- (f) f é descontínua nos pontos da elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.
- (g) f é descontínua nos pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
12. A função g é descontínua em $(0, 0)$ porque o limite de $g(x, y)$ na origem é 0 e $g(0, 0) = 1$. Para remover essa descontinuidade basta redefinir g na origem pondo $g(0, 0) = 0$. A função $h(x, y)$ é descontínua em $(0, 0)$ porque não tem limite nesse ponto. Esse é o caso de uma descontinuidade que não pode ser removida.
13. Usando coordenadas polares, obtém-se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r^2}{1 - \cos r} = 2.$$

Note que, sendo $f(0,0) = 0$, a função f é descontínua na origem. Essa descontinuidade pode ser removida redefinindo f na origem por $f(0,0) = 2$.

14. Em cada caso aplique-se o Teorema do confronto.

$$(a) \quad 1 - \frac{x^2 y^2}{3} \leq \frac{\arctan(xy)}{xy} \leq 1 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(xy)}{xy} = 1.$$

$$(b) \quad 2 - \frac{|xy|}{6} \leq \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|} \leq 2 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4 \cos \sqrt{|xy|}}{|xy|} = 2.$$

15. Vejamos a continuidade de $f(x, y)$. Fora da origem, a função f é uma combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua. Na origem, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\exp(1/r^2)} = 0 = f(0, 0).$$

Logo, f é contínua em todo plano $\mathbb{R}^2$. Verifique que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0.$$

16. (a) Ao longo da reta $y = kx$, temos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^2 + k^3 x^3} = 0$.

(b) Ao longo da curva $y = -x^{2/3}e^x$, aplique a regra de l'Hôpital e mostre que o limite não é 0.

(c) Ao longo da trajetória $r = \cos^2 \theta$ o limite é $\frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta}$.

(d) Segue de (a) e (b) que a função $f(x, y)$ é descontínua na origem. Nos pontos (x, y) , para os quais $x^2 + y^3 \neq 0$, a função $f(x, y)$ é uma função racional (quociente de dois polinômios) com denominador diferente de zero sendo, portanto, contínua nesses pontos.

17. Segue diretamente do Exercício 1.2F(c).

18. Usando coordenadas polares e a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \log r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log r}{1/r^2} = 0.$$

Em que momento no cálculo do limite acima foi utilizada a Regra de L'Hôpital?